数理解析研究所講究録
第 869 巻 1994 年 75-83

確率過程と無限次元 Dyson-Schwinger 型方程式

北海道大学理学部　内 山　智 (Satoshi Uchiyama)

1. 場の理論に於て、古典場の作用汎函数とその量子場の間の関係について興味があったので批判的に考察した。よく知られているように、形式的な汎函数積分表示により、この両者の関係は非常に明瞭になる。以下に、Symanzik[1]に従って、おさらいしてみよう。作用汎函数が

$$\mathcal{A}_M[\phi] = \int d^Dx \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{g}{4}\phi^4 \right). \tag{1}$$

である中性スカラー場$\hat{\phi}(x)$ の時間順序積Tの真空期待値は、τ-函数とよばれる（ここで、$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}} - \sum_{i=1}^{D-1} \frac{\partial^2}{\partial x^{i\,2}}$, Dは時空の次元、$\hbar = 1$ とする。):

$$\tau_n(x_1, \cdots, x_n) \equiv (\Psi_0, \mathrm{T}\hat{\phi}(x_1)\ldots\hat{\phi}(x_n)\Psi_0), \quad n = 0, 1, 2, \cdots。 \tag{2}$$

$(\cdot, \cdot)$ は、状態のなす Hilbert 空間の内積であり、Ψ_0は真空状態である。この函数の集合は、場の同時刻正準交換関係と運動方程式から、Dyson-Schwinger 方程式 (以下 D.-S. 方程式と略) と呼ばれる次の関係式にしたがうことがわかる。

$$\begin{aligned} \tau_0 =& 1 \\ (\Box + \mu^2)\tau_n(x_1, \cdots, x_n) +& g\tau_{n+2}(x_1, x_1, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &= -i \sum_{k=2}^{n} \delta^D(x_1 - x_k)\tau_{n-2}(x_2, \cdots, \hat{x_k}, \cdots, x_n), \\ &\qquad n = 1, 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

$x = (x^0, \mathbf{x})$ を $x = (zx^0, \mathbf{x})$, $z \in C$として、τ_nを解析接続してゆき、$z = -i$ としたときのも

のは、Schwinger 函数とよばれる(1):

$$\mathrm{S}_n((x_1^0, \mathbf{x_1}), \cdots, (x_n^0, \mathbf{x_n})) \equiv \tau_n((-ix_1^0, \mathbf{x_1}), \cdots, (-ix_n^0, \mathbf{x_n}))。 \tag{4}$$

すると、(3) から

$$\begin{aligned}(-\Delta + \mu^2)\mathrm{S}_n(x_1, \cdots, x_n) + g\mathrm{S}_{n+2}(x_1, x_1, x_1, x_2, \cdots, x_n)\\ = \sum_{k=2}^{n} \delta^D(x_1 - x_k)\mathrm{S}_{n-2}(x_2, \cdots, \hat{x}_k, \cdots, x_n)\end{aligned} \tag{5}$$

を、満たす。$\{\mathrm{S}_n\}$ の生成母函数 $Z[J]$を

$$Z[J] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^D x_1 \cdots d^D x_n \mathrm{S}_n J(x_1) \cdots J(x_n) \tag{6}$$

とすると(2)、(5) より、

$$\left[g\frac{\partial}{\partial iJ(x)}\frac{\partial}{\partial iJ(x)}\frac{\partial}{\partial iJ(x)} + (-\Delta + \mu^2)\frac{\partial}{\partial iJ(x)}\right] Z[J] = iJ(x)Z[J] \tag{7}$$

という形にまとまる。もっと一般の作用（ただしϕに関して多項式）の場合も同様で、

$$\frac{\delta \mathcal{A}_E}{\delta\phi(x)}\left(\frac{\delta}{i\delta J}\right) Z[J] = iJ(x)Z[J] \tag{8}$$

を得る(3)。このユークリッド D-S 方程式の形式解として、

$$Z[J] = \int \prod_x d\phi(x) e^{-\mathcal{A}_E[\phi]} e^{i\int dx \phi(x) J(x)} \Big/ \int \prod_x d\phi(x) e^{-\mathcal{A}_E[\phi]} \tag{9}$$

というものが得られることもよく知られている。以下では簡単のために $D = 1$ とする。

上の形式解は、$Z[J]$が$\phi(x)$ という函数の集合上の確率測度 $d\mu(\phi) = \prod_x d\phi(x) e^{-\mathcal{A}[\phi]}$ / $\int \prod_x d\phi(x) e^{-\mathcal{A}[\phi]}$の特性汎関数と見なせることを意味している。すなわち、量子スカラー場と確率測度（或は、確率過程）が、ユークリッド化を通して、対応するわけである。

このように、上の形式解で、確率密度汎函数と見なせる部分、即ち $e^{-\mathcal{A}_E[\phi]}/\int \Pi d\phi e^{-\mathcal{A}_E}$ から、確率測度 $d\mu$の性質を知ることが出来ると期待されるが、$d\mu$は、無限次元ヴェクトル空間上の測度なので、それほど簡単ではない。有限次元の空間、すなわち $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{Z}$ 上には、ルベーグ測度$\Pi_{i=1}^n dx_i$という特別な測度が存在するので、" 多く" の確率測度 Pは、確率密度函数ρにより特徴付けられる：

$$dP(x) = \prod_{i=1}^{n} dx_i \rho(x)。 \tag{10}$$

このルベーグ測度は、R^nを加法に関して位相群とみなしたときの Haar 測度であるという意味で、特別である。無限次元の場合は、そのようなものが存在しないということが、証明される（[2]）(4)。(9) が形式解であることを示すのに、$\prod_x d\phi(x)$ の不変性が必要なのでこの事実は重大である。それ故、無限次元の場合は、確率測度を特徴づける事が出来る確率密度汎関数という概念は無意味であり、有限次元の場合のように $e^{-\mathcal{A}}$の振舞いから $d\mu$の振舞いを知ろうとすると、失敗する場合がある。それは、おもに測度の台に関することである。[3]に詳しく述べられている例を紹介しよう。

特性汎函数が

$$C_\mu[J] = e^{-\frac{2}{\mu^2}||J||^2} \tag{11}$$

である Gauss 型のホワイトノイズの測度は、形式的に

$$d\nu_\mu[\phi] = \prod_x d\phi(x) e^{-\frac{\mu^2}{2}\int |\phi(x)|^2]} \Big/ \int \prod_x d\phi(x) e^{-\frac{\mu^2}{2}\int |\phi(x)|^2]} \tag{12}$$

と書くことが出来る。直接計算してわかるように、これは作用汎函数が

$$\mathcal{A}_w[\phi] = \frac{\mu^2}{2}\int |\phi(x)|^2 dx \equiv \frac{\mu^2}{2}||\phi||^2 \tag{13}$$

である場合の、D.-S. 方程式の解である。（一次元の質量項だけのスカラー場に対応している。）$e^{-\frac{\mu^2}{2}||\phi||^2}$は、原点で最大値をとり、$||\phi|| \to \infty$ で0となるから、原点の近くからの寄与が積分に大きく効くはずである。ところが、ν_μの台は、$\mathcal{S} - L^2$の中にあるので、ν_μが消えないのは、$||\phi|| = \infty$ であるϕの集合の上だから、$e^{-\frac{\mu^2}{2}||\phi||^2} = 0$ という寄与しか得られないことになる。

この矛盾は、ν_μを$\Pi_x d\phi(x)$と$e^{-\frac{\mu^2}{2}\|\phi\|^2}/\int\prod d\phi e^{-\mu^2\|\phi\|^2}$とに、分けて考えたためである。さらに、$\mu_1\neq\mu_2$とすると、

$$\mathrm{supp}\ \nu_{\mu_1}\cap\mathrm{supp}\ \nu_{\mu_2}=\emptyset \tag{14}$$

であることも知られている。これも、形式的な式 (12) を通じての密度汎関数の振舞いからでは、予想の出来ないことである。

作用はD-S方程式を定義し、その解を特徴付けるが、解の細かな性質は、形式解からはくみ取ることが出来ないのである。単一の作用ではなく、パラメーター付けされた作用の列を考え、そのパラメーターを無限に大きくするといった極限操作に関しても、形式解から予想されるような簡単な振舞いをしない場合がある。この例を次で示そう。

2. (7) のD-S方程式を、少し一般化した次の方程式を考えよう。

$$\left[\int dz K(x,z)\frac{\delta}{\delta J(z)}-\int dz_1dz_2dz_3 G(x,z_1,z_2,z_3)\frac{\delta^3}{\delta J(z_1)\cdots\delta J(z_3)}\right]Z[J] \\ =J(x)Z[J] \tag{15}$$

ここで、K、Gは一般にdistributionである。この方程式を、L^2の完全正規直交系をつかって、可算個の連立方程式に書き換えることが出来る。

$$\eta_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{16}$$

とすると（H_nはn次のHermite多項式)、よく知られているように、$\{\eta_n\}$はL^2の完全正規直交系かつ、$\eta_n{}'s\in\mathcal{S}\subset L^2$である。（$L^2$は、二乗ルベーグ可積分な実函数から作ったHilbert空間、$\mathcal{S}$も急減少実函数のFréchet空間）$Z[J]$を特性汎函数とする確率測度が存在するためには、$J\in\mathcal{S}$としておくと都合がよい。するとJは、η_nで展開できる。Jに、その展開係数を対応させ

る写像を$\iota : \mathcal{S} \to \mathbf{R}^\infty$としよう。

$$\begin{aligned} \iota[J] &\equiv (J_0, J_1, J_2, \cdots) \in \mathbf{R}^\infty, \\ J_n &= \int dx \eta_n(x) J(x) \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{17}$$

ιの値域を s とかこう。s は $\mathbf{R}^\infty$の部分集合である。s に適当な位相を入れて、ιを位相同型にできる(5)。s は Fréchet 空間である。ιの微分は、

$$\iota_*\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(x) \frac{\partial}{\partial J_n} \tag{18}$$

という関係をひきおこす。また、ιの引き戻しι^*は s の函数を$\mathcal{S}$の汎函数に写像する。同様にして、積分核　K,G と可算数列 $\{K_{n,m}\}$,$\{G_{p,q,r,s}\}$ の対応が付くこともわかる：

$$\begin{aligned} K_{n,m} &= \int dxdy K(x,y) \eta_n(x) \eta_m(x), \\ G_{p,q,r,s} &= \int dxdydzdw G(x,y,z,w) \eta_p(x) \eta_q(y) \eta_r(z) \eta_s(w), \\ & n,m,p,q,r,s = 0,1,2,\cdots。 \end{aligned} \tag{19}$$

これらの対応から、D-S 方程式 (15) は、

$$\left[\sum_p K_{n,p} \frac{\partial}{\partial J_p} - \sum_{p,q,r} G_{n,p,q,r} \frac{\partial^3}{\partial J_p \partial J_q \partial J_r}\right] Z = J_n Z, \qquad n = 0,1,2,\cdots \tag{20}$$

となる。これは、連立の同次線形偏微分方程式である。添え字 n の範囲が有限で、(20) のように、左辺が$\frac{\partial}{\partial J_n}$の多項式である方程式を Dyson-Schwinger 型方程式と呼ぶことにしよう。すると、(20) は無限次元 Dyson-Schwinger 型方程式とよぶべきである。Dyson-Schwinger 方程式という名称は、Kが普通のカイネティック項であり、かつそれ以外の項がデルタ函数的な点での相互作用を表わす場合だけに使うことにすべきであろう。

有限次元の Dyson-Schwinger 型方程式は、有限次元なので (9) の形の形式解は、$e^{-\mathcal{A}}$が可積分であれば、本当に解である。例えば、$n=1$ の場合の Dyson-Schwinger 型方程式

$$\left(\alpha\frac{d}{dJ}-\beta\frac{d^3}{dJ^3}\right)Z(J)=JZ(J),\alpha,\beta>0 \tag{21}$$

の解は

$$C(J;\alpha,\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}d\phi e^{-\frac{\alpha}{2}\phi^2-\frac{\beta}{4}\phi^4}e^{i\phi J}\Big/\int_{-\infty}^{\infty}d\phi e^{-\frac{\alpha}{2}\phi^2-\frac{\beta}{4}\phi^4} \tag{22}$$

と書ける。(21) は、3 次の常微分方程式なので、これと線形独立な解があと 2 つ存在することに注意しよう。それらは、$|J|\to\infty$ で $e^{*J^{4/3}}$ のように増大するものなので、Fourier 変換ではもとめられない。しかし、われわれの興味があるのは、Dyson-Schwinger 方程式の解に対応する確率測度であったから、解の条件としてそれが正型の函数であるということを付け加えるべきである。この条件は、物理的には状態が負の確率を持たないためにも必要な条件である。結局、正型の函数という条件で、(22) が唯一の解になっている。このように有限次元の場合は、Fourier 変換により得られた積分表示解は非常に有効で、問題はない。

無限次元 Dyson-Schwinger 型方程式に戻ろう。ιによる汎函数微分方程式と D-S 型方程式を対応付けるときに選んだ完全正規直交系の選び方を変えてみよう。まず、完全正規直交系として $\sigma>0$ として

$$\eta_n^\sigma(x)=\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x/\sqrt{2}\sigma)e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}},\quad n=0,1,2,\ldots \tag{23}$$

をとる。これは、ιを定義する際の条件を全て満たしている。とくに、$\eta_n=\eta_n^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$である。$\sigma>0$ を固定しておけば、先ほどと同様に同型

$$\iota^\sigma:\mathcal{S}\to\mathbf{s} \tag{24}$$

を、定義できる。D-S 型方程式 (20) の K, G を以下のようにとることにしよう。

$$
\begin{aligned}
K^\sigma_{n,m} =& \delta_{n,m} K^\sigma_n, \\
G^\sigma_{p,q,r,s} =& \delta_{p,q}\delta_{r,s}\delta_{s,p} G^\sigma_p, \\
K^\sigma_n =& \begin{cases} \frac{n+1/2}{\sigma^2} + \mu_0 \sigma^{-2/3} & ,0 < n \le 2N, \\ \frac{n+1/2}{\sigma^2} + \mu & ,n > 2N. \end{cases} \\
G^\sigma_n =& \begin{cases} g_0 \sigma^{-2/3} & ,0 < n \le 2N, \\ \lambda \frac{2\pi^2}{n} \sigma^2 & ,n > 2N. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

このようにとると、D-S 型方程式は変数分離によりその解をもとめられる。(22) をつかって、

$$
Z^\sigma[J] = \prod_{n=0}^{\infty} C((\iota^\sigma[J])_n; K^\sigma_n, G^\sigma_n) \tag{26}
$$

この D-S 型方程式の作用汎関数は、

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_\sigma[\phi] \\
=& \frac{1}{2}\int dxdy K^\sigma(x,y)\phi(x)\phi(y) + \frac{1}{4}\int dxdydzdw G^\sigma(x,y,z,w)\phi(x)\phi(y)\phi(z)\phi(w)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

である。$\sigma \to \infty$ の極限での作用の振舞いを調べてみる。K^σ に対して、Gauss 函数 $e^{-a(x-x_0)^2}$, $a > 0, x_0 \in \mathbf{R}$ を作用させて、極限をとると、

$$
\int dxdy K^\sigma(x,y) e^{-a(x-x_0)^2} e^{-b(y-y_0)^2} \underset{\sigma\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_0^\infty dp (p^2+\mu^2) e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})p^2} e^{ip(x_0-y_0)} \tag{28}
$$

したがって、

$$
K^\sigma(x,y) \underset{\sigma\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi}(p^2+\mu^2) e^{ip(x-y)} \qquad (= -\frac{d^2}{dx^2} + \mu^2 \text{の積分核.}) \tag{29}
$$

ここでの極限は、Gauss 函数の張る線形空間上の各点収束というたいへん弱い（粗い）位相に関

するものである。同様に

$$G^{\sigma}(x,y,z,w)\xrightarrow[\sigma\to\infty]{}\lambda\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{A(m)^4}{2m}\equiv g=const. \tag{30}$$

$A(m)$ は m だけに依存する函数である。よって、作用でみると

$$\mathcal{A}^{\sigma}[\phi]\xrightarrow[\sigma\to\infty]{}\frac{1}{2}\int dx\phi(x)(-\frac{d^2}{dx^2}+\mu^2)\phi(x)+\frac{1}{4}g\left(\int dx\phi(x)\right)^4\equiv\mathcal{A}^{\infty}[\phi] \tag{31}$$

Z^{σ} を J で展開し、D-S 型方程式に代入して (3) に戻して、次が得られる。

$$\int dzK^{\sigma}(x,z)\mathrm{S}_2^{\sigma}(z,y)+\int dz_1\cdots dz_3G^{\sigma}(x,z_1,\cdots.z_3)\mathrm{S}_4^{\sigma}(z_1,\cdots,z_3,y)=\delta(x-y)$$

Z^{σ} の極限が作用が $\mathcal{A}^{\infty}$ の解であれば、$\mathrm{S}_n^{\infty}=\lim_{\sigma\to\infty}\mathrm{S}_n^{\sigma}$ は、

$$(-\frac{d^2}{dx^2}+\mu^2)\mathrm{S}_2^{\infty}(z,y)+g\int dz_1\cdots dz_3\mathrm{S}_4^{\infty}(z_1,\cdots,z_3,y)=\delta(x-y) \tag{32}$$

を満たすはずである。ところが、Gauss 函数に関する各点収束の意味で、

$$\mathrm{S}_2^{\sigma}(x,y)\xrightarrow[\sigma\to\infty]{}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{d^2C}{dJ_n^2}(J_n;p^2+\mu^2,\frac{2\pi^2\lambda}{p^2})\Big|_{J_n=0}e^{ip(x-y)}+const. \tag{33}$$

$$\mathrm{S}_4^{\sigma,c}(x,y,z,w)^{(6)}\xrightarrow[\sigma\to\infty]{}const. \tag{34}$$

となってしまい、(32) を満たさない。すなわち、Z^{σ} は、(31) の解には収束しない。

この例は、作用と D-S 型方程式の解との対応の不連続性をあらわしている。しかし、この不連続性は我々のかなり安易にいれた粗い位相のためである。すると、どの様な位相を作用の集合に入れれば、この対応に連続性をもたせることかできるか、という問題設定ができるであろう。この問題は、物理的にも興味があると思う。というのは、われわれが上で考察したモデルでは、(27) は (31) のひとつの正則化と考えられるからである。従って、どの様な正則化が上の対応の連続

性を保つか、すなわち、正則化したものの極限により計算されたものは如何なるものになるかという問題になるからである。われわれが上で考察したモデルからは、S_nだけではなく K、G も distribution であることに不連続性の原因があるようである。K,G が、急減少函数で、作用の方も K、G 各々の位相で収束すれば、解も収束するであろう。しかし、物理として、Kが通常のカイネティック項になることが要求されるので、Kが distribution（核）である場合が、重要なのである。

<<参考文献 >>

[1] Symanzik,K :" Euclidean quantum field theory." In : Proceedings of the International School of Phiysics"ENRICO FERMI",Varenna Course XLV, ed.Jost,R.New York:Academic Press (1969).

[2] 山崎　泰郎 :" 無限次元空間の測度 "、紀伊國屋書店 (1978) 、下巻、第一章、§7

[3] 飛田　武幸 :" ブラウン運動 "、岩波書店 (1975) 、§3.4

---

(1) 時間をこのように解析接続していくことは、ユークリッド化と呼ばれる。

(2) ここからは、[1]の論旨からはずれる。

(3) 式の場合は、$\mathcal{A}_E[\phi] = \int d^Dx \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{g}{4}\phi^4\right)$。

(4) 筆者はこのことの証明を見たことがなかったがを、この研究会で小嶋先生より[2]に書いてあるということを御教示いただいた。

(5) [3]の A.3 を参照。

(6) $S_4^{g,c}(x,y,z,w) \equiv S_4^g(x,y,z,w) - S_2^g(x,y)S_2^g(z,w) - S_2^g(y,z)S_2^g(w,x) - S_2^g(y,w)S_2^g(z,x)$。